Лекция 6

КВАДРАТИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

1. Пространство кусочно-квадратичных непрерывных функций

В третьей лекции для задачи (1.1), (2.21) или, что то же самое, для задачи (3.12) был построен такой МКЭ, который дает приближенное решение в виде кусочно-линейной непрерывной функции. Здесь мы построим другой МКЭ, решением которого будет кусочно-квадратичная непрерывная функция, квадратичная на каждом элементе.

Пусть, как и ранее, отрезок $\overline{I}$ разбит точками $x_i = ih = i/N$ на N равных частей $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$. На этом разбиении зададим пространство

$$S_2^h := \left\{ v^h(x) \in C(\overline{I}) \mid \quad v^h|_{e^{(i)}} \in P_2(e^{(i)}),\, i = 1, \ldots, N \right\} \tag{1}$$

кусочно-квадратичных, непрерывных, квадратичных на каждом элементе функций. Это пространство является следующим по сложности после пространства кусочно-линейных непрерывных функций, задаваемого соотношением (3.8), конечноэлементным пространством для решения уравнения (1.1). Мы уже знаем, что конечноэлементное пространство может содержать только непрерывные функции, ибо в противном случае оно не будет подпространством $H^1(I)$, а метод не будет галеркинским.

Подсчитаем размерность пространства S_2^h. Так как отрезок $[0, 1]$ разбит на N элементов, а на каждом элементе функция из S_2^h представляет собой многочлен второй степени, задаваемый тремя параметрами, то размерность пространства кусочно-квадратичных (не непрерывных!) функций на данном разбиении есть $3N$. Требование непрерывности функций из S_2^h накладывает $(N-1)$ связей (по числу общих концов элементов) и, следовательно, $\dim S_2^h = 3N - (N-1) = 2N+1$.

Пространство S_2^h еще не пригодно для решения задачи (1.1), (2.21) — не учтены главные граничные условия задачи. Поскольку таковым является только первое из условий (2.21), то данное требование будет выполнено для функций из подпространства

$$\tilde{S}_2^h := \left\{ v^h(x) \in S_2^h | \quad v^h(0) = 0 \right\} \tag{2}$$

пространства S_2^h. Очевидно, что $\tilde{S}_2^h \in \tilde{H}^1(I)$, $\dim \tilde{S}_2^h = 2N$, а новое конечноэлементное решение задачи (3.12) определяется соотношением (3.14) с $\tilde{S}_2^h$ из (2) вместо $\tilde{S}_1^h$:

$$u^h(x) \in \tilde{S}_2^h : \, a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in \tilde{S}_2^h. \tag{3}$$

Напомним, что $a(u,v)$ и $l(v)$ определяются соотношениями (3.11).

Чтобы найти решение задачи (3), нужно ввести базис в $\tilde{S}_2^h$, разложить по этому базису решение u^h, написать систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения (построить МКЭ) и решить построенную систему. Наша задача состоит в построении МКЭ, т.е. в построении матрицы системы уравнений и ее правой части. В четвертой лекции нам удалось это сделать (для случая $\tilde{S}_1^h$ вместо $\tilde{S}_2^h$) путем поэлементных построений и последующей сборки. В пятой лекции была описана общая технология таких построений. Ею мы здесь и воспользуемся.

2. Матрицы жесткости и массы. Вектор нагрузки

В соответствии с разбиением отрезка $[0,1]$ на элементы $e^{(i)}$ представим билинейную и линейную формы (3.11) в виде

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{N} a^{(i)}(u,v), \quad l(v) = \sum_{i=1}^{N} l^{(i)}(v),$$

где

$$
\begin{aligned}
a^{(i)}(u,v) &:= \int\limits_{e^{(i)}} (pu'v' + quv)dx, \quad i = 1,\dots,N-1,\\
l^{(i)}(v) &:= \int\limits_{e^{(i)}} fvdx, \quad i = 1,\dots,N-1,
\end{aligned} \tag{4}
$$

а поскольку точка $x = 1$ принадлежит лишь элементу $e^{(N)}$, то внеинтегральные члены в (3.11) должны быть отнесены к $a^{(N)}(u,v)$ и $l^{(N)}(v)$ т.е.

$$
\begin{aligned}
a^{(N)}(u,v) &:= \int\limits_{e^{(N)}} (pu'v' + quv)dx + \varkappa u(1)v(1),\\
l^{(N)}(v) &:= \int\limits_{e^{(N)}} fvdx + gv(1).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Пусть, кроме того,

$$
a_p^{(i)}(u,v) := \int\limits_{e^{(i)}} p(x)u'v'dx, \quad a_q^{(i)}(u,v) := \int\limits_{e^{(i)}} q(x)uvdx, \tag{6}
$$

$$
a_\varkappa^{(N)}(u,v) := \varkappa u(1)v(1), \quad l_g^{(N)}(v) := gv(1). \tag{7}
$$

Как уже было сказано, приближенное решение $u^h(x)$ на элементах $e^{(i)}$ представляет собой многочлен второй степени, вид которого полностью определяется заданием его значений в трех точках. Чтобы не войти в противоречие с вышесказанным, эти три точки не могут быть выбраны произвольно: две из них обязаны располагаться в концах элемента $e^{(i)}$, т.е. иметь координаты x_{i-1} и x_i. Если мы этого не сделаем, а расположим все три точки внутри $e^{(i)}$, то при задании приближенного решения на соседнем элементе, скажем, на $e^{(i+1)}$, вообще говоря, будет нарушена его непрерывность в точке x_i, что для решения задачи (3) недопустимо. Этого не произойдет, если конечноэлементное решение $u^h(x)$ на $e^{(i)}$ задается значениями в x_{i-1} и x_i, ибо тогда на соседних элементах $e^{(i-1)}$ и $e^{(i+1)}$ для задания решения будут использованы уже введенные значения $u^h(x_{i-1})$ и $u^h(x_i)$.

Итак, назовем точки x_{i-1} и x_i *узлами* элемента $e^{(i)}$ и будем в них задавать искомое решение. Расположение третьего узла никак не сказывается на приближенном решении, так что, исходя из соображений симметрии, поместим его в середину $e^{(i)}$. Введем на $e^{(i)}$ локальную нумерацию узлов, пронумеровав их слева направо числами $1, 2$ и 3. *Функции формы* на $e^{(i)}$ зададим следующим образом: рассмотрим отрезок $[0, 1]$ оси t, введем на нем узлы с координатами $0, 1/2$ и 1, пронумеруем их числами 1, 2 и 3, соответственно, и определим функции

$$\varphi_1(t) = 2(t-1)(t-1/2), \quad \varphi_2(t) = 4t(1-t), \quad \varphi_3(t) = 2t(t-1/2). \quad (8)$$

Вид этих функций изображен на рис. 1. Тогда функции

$$\varphi_k^{(i)} = \varphi_k\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right), \quad k = 1, 2, 3 \quad (9)$$

суть *функции формы квадратичного элемента* $e^{(i)}$ и

$$u^h(x) = \sum_{k=1}^{3} u_k \varphi_k^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}, \quad (10)$$

где u_k — значение приближенного решения в k-ом узле элемента $e^{(i)}$.

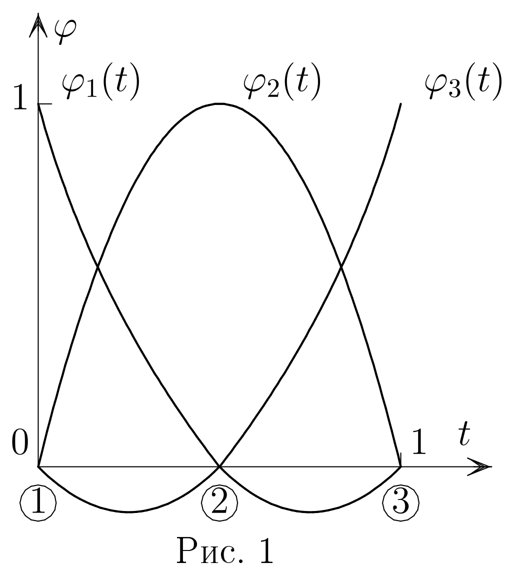

Рис. 1

Пусть, как и раньше,

$$\boldsymbol{u}^{(i)} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T \quad (11)$$

— вектор узловых значений приближенного решения на $e^{(i)}$, а

$$\boldsymbol{\Phi}^{(i)} = \left[\varphi_1^{(i)}(x) \quad \varphi_2^{(i)}(x) \quad \varphi_3^{(i)}(x)\right] \tag{12}$$

— матрица функций формы. Используя (11), (12), приближенное решение (10) запишем в виде

$$u^h(x) = \boldsymbol{\Phi}^{(i)}(x)\boldsymbol{u}^{(i)}, \quad x \in e^{(i)}. \tag{13}$$

Тогда

$$\frac{du^h(x)}{dx} = \left[\frac{d}{dx}\boldsymbol{\Phi}^{(i)}(x)\right]\boldsymbol{u}^{(i)}, \quad x \in e^{(i)}. \tag{14}$$

Пусть $v^h(x) = \boldsymbol{\Phi}^{(i)}\boldsymbol{v}^{(i)}$ — произвольный многочлен второй степени на $e^{(i)}$. Подставляя (14) и $dv^h/dx = [d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}/dx]\boldsymbol{v}^{(i)}$ в первое из соотношений (6), находим, что

$$a_p^{(i)}(u^h, v^h) = \int\limits_{e^{(i)}} p(x)\left(\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\boldsymbol{u}^{(i)}\right)\left(\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\boldsymbol{v}^{(i)}\right)dx.$$

Но

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\boldsymbol{v}^{(i)} = \left(\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\boldsymbol{v}^{(i)}\right)^T = \boldsymbol{v}^{(i)T}\left[\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\right]^T$$

и, следовательно,

$$a_p^{(i)}(u^h, v^h) = \int\limits_{e^{(i)}} \boldsymbol{v}^{(i)T}\left[\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\right]^T p(x)\left[\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\right]\boldsymbol{u}^{(i)}dx.$$

Принимая теперь во внимание, что $\boldsymbol{u}^{(i)}$ и $\boldsymbol{v}^{(i)}$ — числовые векторы и, следовательно, могут быть вынесены из под знака интеграла, будем иметь

$$a_p^{(i)}(u^h, v^h) = \boldsymbol{v}^{(i)T}\int\limits_{e^{(i)}}\left[\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\right]^T p(x)\left[\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\right]dx\boldsymbol{u}^{(i)} = \boldsymbol{v}^{(i)T}K_p^{(i)}\boldsymbol{u}^{(i)}, \tag{15}$$

где

$$K_p^{(i)} = \int\limits_{e^{(i)}}\left[\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\right]^T p(x)\left[\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{(i)}}{dx}\right]dx \tag{16}$$

— матрица жесткости элемента $e^{(i)}$, отвечающая билинейной форме $a_p^{(i)}$. Найдем явный вид $K_p^{(i)}$ для того случая, когда $p(x) = \text{const} = p$ при $x \in e^{(i)}$. Сделаем в (16) замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{x - x_{i-1}}{h} = t. \tag{17}$$

С учетом (12), (9), (8) получим

$$\begin{aligned} K_p^{(i)} &= \int_0^1 \frac{1}{h} \begin{bmatrix} d\varphi_1/dt \\ d\varphi_2/dt \\ d\varphi_3/dt \end{bmatrix} p \, \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \dfrac{d\varphi_1}{dt} & \dfrac{d\varphi_2}{dt} & \dfrac{d\varphi_3}{dt} \end{bmatrix} h dt = \\ &= \frac{p}{h} \int_0^1 \begin{bmatrix} 4t-3 \\ -8t+4 \\ 4t-1 \end{bmatrix} [(4t-3) \quad (-8t+4) \quad (4t-1)] \, dt = \\ &= \frac{p}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя (13) и $v^h(x) = \varPhi^{(i)} \boldsymbol{v}^{(i)}$ во второе соотношение (6), аналогично имеем

$$\begin{aligned} a_q(u^h, v^h) &= \int\limits_{e^{(i)}} q(x)(\varPhi^{(i)} \boldsymbol{u}^{(i)})(\varPhi^{(i)} \boldsymbol{v}^{(i)}) dx = \\ &= \boldsymbol{v}^{(i)T} \int\limits_{e^{(i)}} \varPhi^{(i)T} q(x) \varPhi^{(i)} dx \; \boldsymbol{u}^{(i)} = \boldsymbol{v}^{(i)T} K_q^{(i)} \boldsymbol{u}^{(i)}, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$K_q^{(i)} =: M^{(i)} = \int\limits_{e^{(i)}} \varPhi^{(i)T} q(x) \varPhi^{(i)} dx \tag{20}$$

— матрица жесткости элемента $e^{(i)}$, отвечающая билинейной форме $a_q^{(i)}$ — *матрица массы элемента*. Пусть $q(x) = \text{const} = q$ при $x_i \in e^{(i)}$. Тогда с учетом (17), (12), (9), (8)

$$M^{(i)} = h \int_0^1 \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{bmatrix} q \, [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \varphi_3(t)] \, dt = \frac{qh}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Замечание 1. Для упрощения вычислений матрицы жесткости или матрицы массы элемента полезны следующие построения, которые мы проведем на примере вычисления матрицы массы (21).

Сделаем в (13) замену переменной (17). В результате с учетом (8) будем иметь

$$\begin{aligned} u^h(x) = \hat{u}(t) = \sum_{k=1}^{3} u_k \varphi_k(t) = u_1 \cdot 2(t-1)(t-1/2) + u_2 \cdot 4t(1-t) + u_3 \cdot 2t(t-1/2) = \\ = u_1 + (-3u_1 + 4u_2 - u_3)t + (2u_1 - 4u_2 + 2u_3)t^2 = \sum_{l=1}^{3} c_l t^{l-1} = T\boldsymbol{c}, \end{aligned} \tag{22}$$

где матрица $T = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix}$, а $\boldsymbol{c}^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]$. При этом

$$\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{u}^{(i)}, \tag{23}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в силу (22)

$$\int\limits_{e^{(i)}} \left[u^h(x)\right]^2 dx = h \int_0^1 (T\boldsymbol{c})^2 \, dt = h\boldsymbol{c}^T \int_0^1 T^T T dt \, \boldsymbol{c} =$$

$$= h\boldsymbol{c}^T \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 & t^4 \end{bmatrix} dt \, \boldsymbol{c} = h\boldsymbol{c}^T \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \boldsymbol{c} = h\boldsymbol{c}^T B\boldsymbol{c},$$

то с учетом (23)

$$\int\limits_{e(i)} \left[u^h(x)\right]^2 dx = h\left[A\boldsymbol{u}^{(i)}\right]^T B \left[A\boldsymbol{u}^{(i)}\right] = \boldsymbol{u}^{(i)T} h A^T B A \boldsymbol{u}^{(i)} = \boldsymbol{u}^{(i)T} M^{(i)} \boldsymbol{u}^{(i)}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} M^{(i)} &= hA^T BA = \\ &= h \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{h}{60} \begin{bmatrix} 10 & 0 & -1 \\ 40 & 20 & 12 \\ 10 & 10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{h}{60} \begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 4 & 32 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

что совпадает с (21) при $q = 1$.

Из (18) следует, что в каждой строке матрицы $K_p^{(i)}$ сумма элементов равна нулю. Покажем, что это общее свойство матрицы $K_p^{(i)}$, не зависящее от того, является ли коэффициент p постоянным или нет.

Утверждение 1. В каждой строке матрицы $K_p^{(i)}$ из (16) сумма элементов равна нулю.

Доказательство. Положим в $a_p^{(i)}(u^h, v^h)$ из (6) $u^h \equiv \mathrm{const} = u \neq 0$. Тогда $a_p^{(i)}(u^h, v^h) = 0$. С другой стороны, в силу (15)

$$0 = a_p^{(i)}(u^h, v^h) = \boldsymbol{v}^{(i)T} K_p^{(i)} \boldsymbol{u}^{(i)}$$

Но $\boldsymbol{u}^{(i)} = [u\ u\ u]^T$ и, следовательно,

$$0 = \boldsymbol{v}^{(i)T} K_p^{(i)} \boldsymbol{u}^{(i)} = [v_1\ v_2\ v_3] \begin{bmatrix} K_p^{(i)}(1,1) & K_p^{(i)}(1,2) & K_p^{(i)}(1,3) \\ K_p^{(i)}(2,1) & K_p^{(i)}(2,2) & K_p^{(i)}(2,3) \\ K_p^{(i)}(3,1) & K_p^{(i)}(3,2) & K_p^{(i)}(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \\ u \end{bmatrix} =$$

$$= [v_1\ v_2\ v_3] \left[\left(u \sum_{n=1}^{3} K_p^{(i)}(1,n) \right) \left(u \sum_{n=1}^{3} K_p^{(i)}(2,n) \right) \left(u \sum_{n=1}^{3} K_p^{(i)}(3,n) \right) \right]^T .$$

Выражение, стоящее в правой части, есть не что иное, как скалярное произведение двух векторов. Поскольку оно равно нулю, то указанные векторы ортогональны. Но произвольный вектор $[v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T$ может быть ортогонален лишь нулевому вектору, а так как $u \neq 0$, то

$$\sum_{n=1}^{3} K_p^{(i)}(m,n) = 0, \quad m = 1, 2, 3.$$

$\square$

Утверждение 2. Сумма всех элементов матрицы массы $M^{(i)}$ равна $\int\limits_{e^{(i)}} q(x)dx$.

Доказательство. Пусть теперь $u^h(x) = v^h(x) = 1$ на $e^{(i)}$. Тогда в силу (6) $a_q^{(i)}(u^h, v^h) = \int\limits_{e^{(i)}} q dx$. С другой стороны, в силу (19) $a_q^{(i)}(u^h, v^h) = \boldsymbol{v}^{(i)T} M^{(i)} \boldsymbol{u}^{(i)}$. Но $\boldsymbol{u}^{(i)} = \boldsymbol{v}^{(i)} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ и, следовательно, $\boldsymbol{v}^{(i)T} M^{(i)} \boldsymbol{u}^{(i)} = \sum_{m,n=1}^{3} M^{(i)}(m,n)$. $\square$

Сложим матрицы $K_p^{(i)}$ и $M^{(i)}$. Принимая во внимание (4) и (6), заключаем, что

$$K^{(i)} = K_p^{(i)} + M^{(i)} \tag{24}$$

есть (полная) матрица жесткости элемента $e^{(i)}$.

Вычислим вектор нагрузки элемента. Полагая в (4) $v = v^h = \boldsymbol{\Phi}^{(i)}\boldsymbol{v}^{(i)}$, будем иметь

$$l^{(i)}(v^h) = \int\limits_{e^{(i)}} f(\Phi^{(i)}\boldsymbol{v}^{(i)})dx = \boldsymbol{v}^{(i)T}\int\limits_{e^{(i)}} f\Phi^{(i)T}dx = \boldsymbol{v}^{(i)T}\boldsymbol{F}^{(i)},$$

где

$$\boldsymbol{F}^{(i)} = \int\limits_{e^{(i)}} f(x)\Phi^{(i)T}dx \tag{25}$$

— искомый вектор. Если $f(x) = \text{ const} = f$ при $x \in e^{(i)}$, то с учетом (12), (9), (8) находим, что

$$\boldsymbol{F}^{(i)} = h\int_0^1 f[\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \varphi_3(t)]^T dt = \frac{hf}{6}[1 \quad 4 \quad 1]^T. \tag{26}$$

3. Сборка

Найдем теперь глобальную матрицу жесткости и глобальный вектор нагрузки. Сделаем это для случая, когда отрезок $[0,1]$ разбит на три элемента. Глобальная нумерация узлов на $[0,1]$ и локальная нумерация на $e^{(i)}$ изображены на рис. 2.

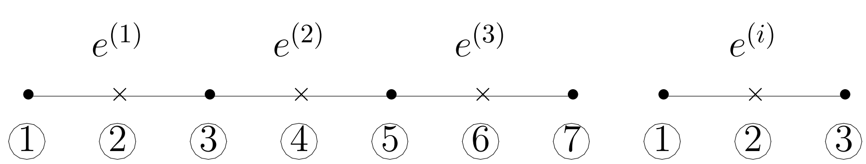

Рис. 2

Из соответствия локальной и глобальной нумераций узлов строим определяемую (5.13) матрицу индексов L, которая принимает вид

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание матрицу индексов, находим, что глобальная матрица жесткости $K_{(f)}$ и глобальный вектор нагрузки $\boldsymbol{F}_{(f)}$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & & & & \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & & & & \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & & \\ & & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & & \\ & & k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & k_{13}^{(3)} \\ & & & & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & k_{23}^{(3)} \\ & & & & k_{31}^{(3)} & k_{32}^{(3)} & k_{33}^{(3)} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} + f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \\ f_3^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Чтобы "снять флажки"у $K_{(f)}$ и $\boldsymbol{F}_{(f)}$, нужно учесть граничные условия (2.21). Первое из них — главное граничное условие. Оно требует вычеркивания первой строки $K_{(f)}$ и первого элемента $\boldsymbol{F}_{(f)}$, а также вычитания из оставшейся части $\boldsymbol{F}_{(f)}$ оставшегося первого столбца $K_{(f)}$, умноженного на u_0. Но $u_0 = 0$ и, следовательно, достаточно просто вычеркнуть первый столбец матрицы $K_{(f)}$.

Обратимся ко второму граничному условию (2.21). Это условие естественное, но оно вносит свой вклад и в билинейную форму (3.11) в виде внеинтегрального члена $\varkappa u(1)v(1)$ (см.(7)) и в линейную форму(3.11) в виде внеинтегрального члена $gv(1)$ (см.(7)). Это нашло отражение в (5). Из (5) и (4) следует, что построенные нами на общих основаниях матрица жесткости $K^{(N)}$ и вектор нагрузки $F^{(N)}$ элемента $e^{(N)}$ не отвечают действительности, так как не учитывают указанные выше внеинтегральные члены. Чтобы исправить положение нужно еще построить матрицу жесткости $K_{\varkappa}^{(N)}$ и вектор нагрузки $\boldsymbol{F}_g^{(N)}$, отвечающие формам (7), и добавитьих к модифицированным $K_{(f)}$ и $\boldsymbol{F}_{(f)}$. Очевидно, что

$$a_{\varkappa}^{(N)}(u^h, v^h) = \varkappa\left(\Phi^{(N)}(1)\boldsymbol{u}^{(N)}\right)\left(\Phi^{(N)}(1)\boldsymbol{v}^{(N)}\right) =$$
$$= \left[\boldsymbol{v}^{(N)}\right]^T \left[\Phi^{(N)T}(1)\varkappa\Phi^{(N)}(1)\right]\boldsymbol{u}^{(N)},$$

то-есть

$$K_{\varkappa}^{(N)} = \left[\Phi^{(N)}(1)\right]^T \varkappa \left[\Phi^{(N)}(1)\right] =$$
$$= \begin{bmatrix}\varphi_1(1)\\ \varphi_2(1)\\ \varphi_3(1)\end{bmatrix}\varkappa\,[\varphi_1(1) \quad \varphi_2(1) \quad \varphi_3(1)] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varkappa\end{bmatrix}. \tag{27}$$

Аналогично

$$l_g^{(N)}(v^h) = g\left(\Phi^{(N)}(1)\boldsymbol{v}^{(N)}\right) = \boldsymbol{v}^{(N)T}\boldsymbol{F}_g^{(N)},$$

где

$$\boldsymbol{F}_g^{(N)} = g\,[\varphi_1(1) \quad \varphi_2(1) \quad \varphi_3(1)]^T = [0 \quad 0 \quad g]^T. \tag{28}$$

Выполняя теперь требуемые преобразования модифицированных $K_{(f)}$ и $\boldsymbol{F}_{(f)}$, получим искомые матрицу жесткости и вектор нагрузки $\boldsymbol{F}$, так что система уравнений примет вид:

$$\begin{bmatrix}
k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & & & & \\
k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & & \\
 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & & \\
 & k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)}+k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & k_{13}^{(3)}\\
 & & & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & k_{23}^{(3)}\\
 & & & k_{31}^{(3)} & k_{32}^{(3)} & k_{33}^{(3)}+\varkappa
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\\ u_7\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}f_2^{(1)}\\ f_3^{(1)}+f_1^{(2)}\\ f_2^{(2)}\\ f_3^{(2)}+f_1^{(3)}\\ f_2^{(3)}\\ f_3^{(3)}+g\end{bmatrix}, \tag{29}$$

где $u_k = \boldsymbol{U}_{(f)}(k)$. При $p(x) = \text{const} = p$, $q = 0$ и $f(x) = \text{const} = f$ система (29) принимает вид

$$\frac{p}{3h}\begin{bmatrix}
16 & -8 & & & & \\
-8 & 14 & -8 & 1 & & \\
 & -8 & 16 & -8 & & \\
 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1\\
 & & & -8 & 16 & -8\\
 & & & 1 & -8 & 7+\frac{3h\varkappa}{p}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\\ u_7\end{bmatrix}
= \frac{hf}{6}\begin{bmatrix}4\\ 2\\ 4\\ 2\\ 4\\ 1+\frac{6}{hf}g\end{bmatrix}. \tag{30}$$

Замечание 2. Как следует из рис. 2, неизвестные с четными номерами в системе (29) представляют собой значения приближенного решения в серединных узлах элементов. Эти неизвестные могут быть легко исключены из системы (29) путем разрешения первого, третьего и пятого уравнений относительно u_2, u_4, u_6 и подстановки найденных выражений во второе, четвертое и шестое уравнения. Поскольку первое, третье и пятое уравнения системы (29) на самом деле были сформированы уже при построении локальных матриц жесткости и векторов нагрузки, то исключение указанных неизвестных можно было бы осуществить на этом уровне до формирования глобальных матрицы и вектора.

4. Упражнения

1. Найти размерность конечноэлементного пространства

$$S_k^h = \left\{ v^h(x) \in C(\bar{I}) | \quad v^h(x)|_{e^{(i)}} \in P_k(e^{(i)}), \quad i = 1, ..., \quad N \right\}.$$

2. Аналогично (9), (8) построить функции формы элемента $e^{(i)}$, отвечающие S_3^h из упражнения 1.

3. Используя построенные в упражнении 2 функции формы, найти матрицы жесткости $K_p^{(i)}, K_q^{(i)}$, отвечающие билинейным формам (6), и вектор нагрузки $\boldsymbol{F}^{(i)}$, отвечающий линейной форме (4). Убедиться в справедливости утверждений 1 и 2 для построенных матриц.

4. Доказать, что сумма компонент вектора нагрузки $\boldsymbol{F}^{(i)}$ элемента $e^{(i)}$ равна $\int\limits_{e^{(i)}} f(x)dx$.

5. Показать, что после исключения из системы (29) неизвестных с четными номерами (значений в средних точках), полученная система совпадает с системой (4.24) при соответствующих значениях p, f и $\varkappa$.

6. При помощи МКЭ найти решение следующей задачи:

$$-u'' = 32, \quad 0 < x < 1, \quad -u'(0) = 32, \quad u(1) = 32.$$

Воспользоваться разбиением отрезка $[0, 1]$ на два элемента одинаковой длины и представлением решения в виде линейной функции на левом из них и квадратичной – на правом.